11/12/1

Μήκος καμπύλης

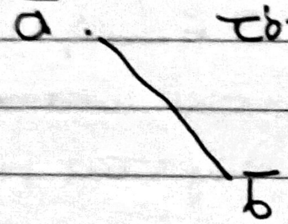
Έστω μία καμπύλη $\bar\gamma, I \to \mathbb{R}^n, I \subset \mathbb{R}$ διάστημα,

π.χ $I = [a, \beta]$

$$\bar\gamma(t) \in \mathbb{R}^n = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$$

σ/ς

Αν $\bar\gamma(t) = \bar a + t(\bar b - \bar a), \ t \in [0,1]$



τότε το μήκος της καμπύλης είναι $\|\bar b - \bar a\|$

και παρατηρούμε ότι

$$\bar\gamma'(t) = \bar b - \bar a \Rightarrow \|\bar\gamma'(t)\| = \|\bar b - \bar a\|$$

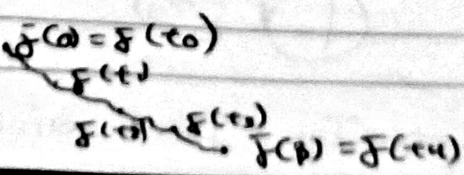
$$= D\bar\gamma(t) = J_\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} \dots$$

Εδώ $\bar\gamma(t) = \begin{pmatrix} a_1 + t(b_1 - a_1) \\ \vdots \\ a_n + t(b_n - a_n) \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{Ορισμός}}$: Έστω $\gamma [a,\beta] \to \mathbb{R}^n$ μία <u>παραμετρική καμπύλη</u> και $\mathcal{P}([a,\beta])$ το σύνολο των διαμερίσεων του $[a,\beta]$ (διαμέρισης $a = t_0 < t_1 < \dots < t_\nu = \beta$).

Τότε η $\bar\gamma$ ονομάζεται <u>ευθυγραμμίσιμη</u> αν $\exists$ <u>το μήκος της καμπύλης</u>

μήκος καμπύλης $\rightarrow$ $L(\gamma) = \sup\left\{ \sum_{k=1}^{\nu} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| : P = \{\overset{a}{t_0}, \dots, \overset{\beta}{t_\nu}\} \in \mathcal{P}([a,\beta]) \right\}$



(δηλ. το μήκος της καμπύλης είναι το ελάχιστο άνω φράγμα των μηκών όλων των πολυγωνικών γραμμών που προκύπτουν από τη ένωση με ευθ. τμήματα των σημείων $f(t_k) + f(t_{k-1})$ για κάθε διαμέριση $\{t_0, \dots, t_n\}$ του $[a, \beta]$).*

Προσοχή!! Προφανώς $\exists$ και μη ευθυγραμμίσιμες (κώδικας για μήκος) καμπύλες π.χ η $f(t) = (t, g(t))$, $t \in [0,1]$.

με $g(t) = \begin{cases} t\cos\left(\frac{\pi}{t}\right), & t > 0 \\ 0, & t = 0. \end{cases}$

Θεώρημα (SOS για καμπύλες)

Μια σ/ς διαφορίσιμη καμπύλη $f : [a, \beta] \to$ είναι ευθυγραμμίσιμη και έχει μήκος

$$L(f) = \int_a^\beta \|f'(t)\| \, dt$$ μόνο για σ/ς διαφορίσιμη.

Απόδειξη

(1) Λήμμα: Αν f συνεχώς διαφορίσιμη

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall t, \tau \in [a, \beta]$, (1)

$0 < |t - \tau| < \delta : \left\| \frac{f(t) - f(\tau)}{t - \tau} - f'(t) \right\| < \varepsilon$.

$\frac{f(t)-f(\tau)}{t-\tau} = \left(\frac{f_i(t) - f_i(\tau)}{t - \tau}\right)_{1 \le i \le n}$

Απόδειξη Λήμματος: f $[a, \beta] \to \mathbb{R}^n$ σ/ς διαφορίσιμη

$\overset{\text{ορισ}}{\Rightarrow} f' \ [a, \beta] \overset{\text{σ/ς}}{\Rightarrow} \mathbb{R}^n$ $\exists$ και σ/ς

$\Rightarrow f_i' : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ σ/ς $\forall i = 1, \dots, n$ $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f_i' : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα σ/ς

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall t, s \in [a, \beta]$

$|t - s| < \delta \ \forall i = 1, \dots, n \ |f_i'(s) - f_i'(t)| < \varepsilon$ (2)

Από την άλλη από το Θ.Μ.Τ έχουμε

$$\frac{f_i(t) - f_i(\tau)}{t - \tau} = f_i'(\underbrace{\cancel{\tau}\, t + \theta_i(t-\tau)}_{=s})$$

$\forall\ t, \tau \in [a, \beta]$ με $0 < |t-\tau| < \delta$

και κάποια $\theta_i \in (0,1)$ $\forall i = 1, \dots, n$

$$\Rightarrow |t-s| < |t-\tau| < \delta \Rightarrow (1), (2)$$

$[\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t, \tau \in [a, \beta]$
$0 < t - \tau < \delta$

$$\left\| \frac{f(t) - f(\tau)}{t-\tau} - f(t) \right\|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \underbrace{\frac{f_i(t) - f_i(\tau)}{t-\tau}}_{\overset{(1)}{=} f_i'(\underbrace{t+\theta_i(t-\tau)}_{=s})} - f_i'(t) \right|^2$$

$\leq n\varepsilon^2$, όπου το $0 \dots (2)$ $\square$

$\boxed{\text{Λήμμα 2}}$

Για ~~κάποια~~ κάθε συνεχή καμπύλη ισχύει

$$\Big\| \int_a^\beta \underbrace{f(t)}_{=\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}} dt \Big\| := \left\| \begin{pmatrix} \int_a^\beta f_1(t)\,dt \\ \int_a^\beta f_n(t)\,dt \end{pmatrix} \right\| \leq \int_a^\beta \|f(t)\|\,dt$$

Προσοχή: Αυτό δεν είναι επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (βλ. ΛΔ ΙΙ).

Μένει να δείξω ότι $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \sum_{k=1}^{\nu} \|f(t_k) - f(t_{k-1})\| = \Sigma : \Sigma > S - \varepsilon$

Γνωρίζουμε ότι $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall$ διαμέριση με λεπτότητα $\max\limits_{k=1,\dots,\nu} \{t_k - t_{k-1}\} < \delta$

έτσι ώστε $\left| \underbrace{\int_a^\beta \|f'(t)\| dt}_{= S} - \sum_{k=1}^{\nu} \|f'(t_k)\|(t_k - t_{k-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

και από το Λήμμα $\boxed{2}$ ότι

$$\left\| \frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} - f'(t_k) \right\| < \frac{\varepsilon}{2(\beta - a)} \quad \forall k = 1, \nu$$

$$\Rightarrow \left| \underbrace{\int_a^\beta \|f'(t)\| dt}_{= S} - \underbrace{\sum_{k=1}^{\nu} \|f(t_k) - f(t_{k-1})\|}_{\Sigma} \right| \leq$$

$$\leq \left| S - \sum_{n=1}^{\nu} \|f'(t_k)\|(t_k - t_{k-1}) \right| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\nu} \|f(t_k) - f(t_{k-1}) - f'(t_k)(t_k - t_{k-1})\| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\varepsilon (t_k - t_{k-1})}{2(\beta - a)} = \varepsilon.$$

δειξη:

Αφού $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}^n$ συνεχής $\Rightarrow \|f\|:[a,\beta]\to$

$\mathbb{R}^n$ συνεχής $t\to\|f(t)\|$

$t_n\to t_0 \Rightarrow f(t_n)\to f(t_0) \Leftrightarrow \|f(t_n)-f(t_0)\|\to 0$

$\Rightarrow \big|\|f(t_n)\|-\|f(t_0)\|\big|\to 0$

$\xrightarrow{\text{αθροίσματα}}$ $S_\nu^{(i)} = \sum_{k=1}^{\nu} f_i\left(a+k\frac{\beta-a}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} \xrightarrow[\nu\to\infty]{}$

αν

$\xrightarrow[\nu\to\infty]{} \int_a^\beta f_i(t)\,dt$ $\left(S_\nu := \sum_{k=1}^{\nu} \left\|f\left(a+k\frac{\beta-a}{\nu}\right)\right\|\frac{1}{\nu} \to \right.$

$\xrightarrow[\nu\to\infty]{} \int_a^\beta \|\bar{f}(t)\|\,dt \Rightarrow \lim_{\nu\to\infty}\bar{S}_\nu = \int_a^\beta \bar{f}(t)\,dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{\nu\to\infty}\|\bar{S}_\nu\| = \left\|\int_a^\beta \bar{f}(t)\,dt\right\| =$

Όμως $\|\bar{S}_\nu\| \le S_\nu$ τέλος.

αφού $\|S_\nu\| = \left\|\sum_{k=1}^{\nu} f\left(a+k\frac{\beta-a}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}\right\| \le$

$\le \sum_{k=1}^{\nu}\left\|f\left(a+k\frac{\beta-a}{\nu}\right)\right\|\frac{1}{\nu} = \delta_\nu$

Τώρα έχω 2 λήμματα και πάω στην απόδειξη του Θεωρήματος:

$L(f) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{\nu}\|f(t_k)-f(t_{k-1})\|\right.$ ~~$\{t_0,\dots,t$~~ $\{t_0,\dots,t_\nu\}$ διαμέριση του $[a,\beta]\Big\} = \int_a^\beta \|f'(t)\|dt$

(1) $\sum_{i=1}^{\nu}\|f(t_k)-f(t_{k-1})\| \le \sum_{i=1}^{\nu}\underbrace{\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k} f'(t)\,dt\right\|}_{\underset{\text{λήμμα}}{\le}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|f'(t)\|}$ όπου αυτό είναι από εφαρμογή.